

生機系電工學第七次測驗 2012/12/12 【解答】

學號：

姓名：

1. For the following pairs determine the power delivered to the load, find the power factor, and indicate whether it is a resistor, inductor, or capacitor.

$$v(t) = 100 \sin(10^6 t - 10^\circ) \text{V} \quad i(t) = 0.2 \sin(10^6 t - 40^\circ) \text{A}$$

【解答】

從電壓源的電壓 $v(t)$ 與電壓源流出的電流 $i(t)$ ，得知電流落後電壓 30° 。

電流落後電壓表示負載 (load) 端非純電阻，其電感性高於電容性，是一具有電感特徵的負載。

因此，Power factor $F_p = \cos 30^\circ = 0.866$ Lagging

$$\text{Real power } P = V(j\omega)I(j\omega) \cos \theta = \frac{100\text{V} \cdot 0.2\text{A}}{2} \cos 30^\circ = 8.66\text{W}$$

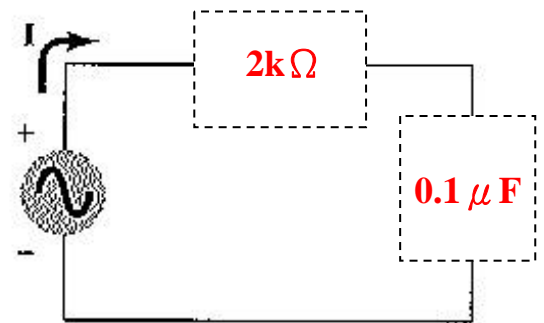
特別注意其中 100 與 0.2 皆非 effective value，所以兩者相乘時，得記得 $\div 2$ 。

如果要進一步求 apparent power S ? reactive power Q ?

$$S = V(j\omega)I(j\omega) = \frac{100\text{V} \cdot 0.2\text{A}}{2} = 10\text{VA}$$

$$Q = V(j\omega)I(j\omega) \sin \theta = \frac{100\text{V} \cdot 0.2\text{A}}{2} \sin \theta = 5\text{VAR}$$

2. 圖示電路的電壓源 $v(t) = 169.706 \sin(1000t)$ 、電流 $i(t) = 16.639 \times 10^{-3} \sin(1000t + 78.69^\circ)$ 。請問電路上兩個未知元件分別為何？其電阻值？或電感值？或電容值？請把元件符號畫上去，並把電阻值或電感值或電容值標上去【注意單位，沒有標示單位不予計分】



【解答】

先把電壓源電壓與電流，轉寫成 phasor 型式

$$V(j\omega) = 120 \angle 0^\circ, \quad I(j\omega) = 11.767 \times 10^{-3} \angle 78.69^\circ$$

由電壓與電流可以求出負載端的 impedance (阻抗)

$$Z_T = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{120 \angle 0^\circ}{11.767 \times 10^{-3} \angle 78.69^\circ}$$

$$= 10.198 \times 10^3 \angle -78.69^\circ = 2 \times 10^3 - j10 \times 10^3 = R - jX_c$$

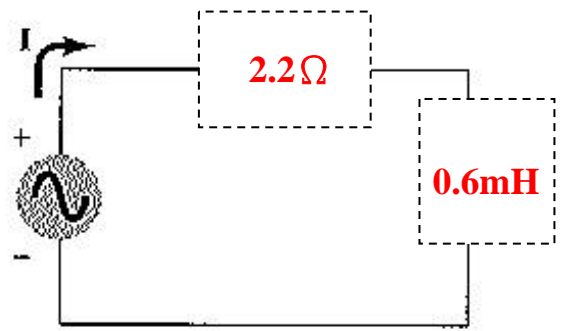
電阻為 $2 \text{ k}\Omega$

電容的電抗 (reactance) 為 $10 \text{ k}\Omega$ ，但電容的電容值 (capacitance) ?

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = 10 \times 10^3 \quad C = 0.1 \mu\text{F}$$

可以看出負載端是電阻與電容的組合。

3. 圖示電路的電壓源 $v(t) = 84.853 \sin(1000t)$ 、電流 $i(t) = 37.22 \sin(1000t - 15.26^\circ)$ 。請問電路上兩個未知元件分別為何？其電阻值？或電感值？或電容值？請把元件符號畫上去，並把電阻值或電感值或電容值標上去
【注意單位，沒有標示單位不予計分】



【解答】

先把電壓源電壓與電流，轉寫成 phasor 型式

$$V(j\omega) = 60 \angle 0^\circ, \quad I(j\omega) = 26.3185 \angle -15.26^\circ$$

由電壓與電流可以求出負載端的 impedance (阻抗)

$$Z_T = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{60 \angle 0^\circ}{26.3185 \angle -15.26^\circ}$$

可以看出負載端是電阻與電感的組合。

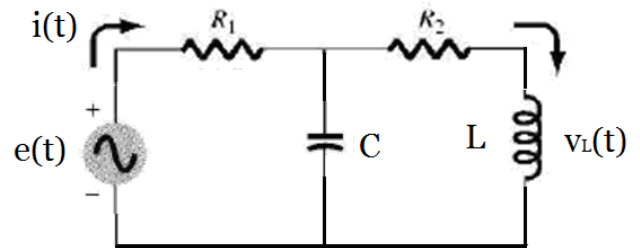
$$= 2.28 \Omega \angle 15.26^\circ = 2.2 \Omega + j0.6 \Omega = R + jX_L$$

電阻為 2.2Ω

電感的電抗 (reactance) 為 0.6Ω ，但電感的電感值 (inductance) ？

$$X_L = \omega L = 0.6 \Omega \quad L = 0.6 \text{ mH}$$

4. $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ 、 $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ 、 $C = 0.2 \mu\text{F}$ 、 $L = 3 \text{ H}$ 。電壓源 $e(t)$ 的 $e_{\text{eff}} = 120 \text{ V}$ ， $\omega = 1,000 \text{ rad/s}$ ，phase angle = 10° 。求 $i(t)$ 與 $v_L(t)$



【解答】

先把電壓源寫成 phasor 型式

$$E(j\omega) = 120 \angle 10^\circ$$

再把元件以 impedance 表現

$$Z_{R1} = 2 \text{ k}\Omega$$

$$Z_{R2} = 3 \text{ k}\Omega$$

$$Z_L = j3 \text{ k}\Omega = 3 \text{ k}\Omega \angle 90^\circ$$

$$Z_C = -j5 \text{ k}\Omega = 5 \text{ k}\Omega \angle -90^\circ$$

R_2 與 L 串聯 $\blacktriangleright Z'$

$$Z' = Z_{R2} + Z_L = 3 \text{ k}\Omega + j3 \text{ k}\Omega = 4.243 \text{ k}\Omega \angle 45^\circ$$

Z' 與 C 並聯 $\blacktriangleright Z''$

$$Z'' = Z' // Z_C = \dots$$

$$= 5.878 \text{ k}\Omega \angle -11.31^\circ = 5.764 \text{ k}\Omega - j1.152 \text{ k}\Omega + j3 \text{ k}\Omega$$

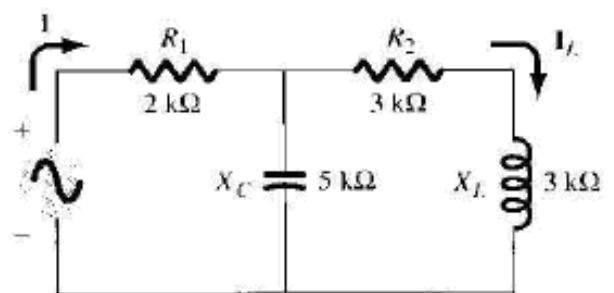
Z'' 與 R_1 串聯 $\blacktriangleright Z_T$

$$Z_T = Z_{R1} + Z'' = 7.764 \text{ k}\Omega - j1.152 \text{ k}\Omega = 7.849 \text{ k}\Omega \angle -8.44^\circ$$

求由電壓源流出的電流

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z_T} = \frac{120 \angle 10^\circ}{7.849 \text{ k}\Omega \angle -8.44^\circ} = 15.29 \text{ mA} \angle 18.44^\circ \quad (\text{Phasor 型式})$$

轉成 time domain



$$i(t) = 21.623\text{mA} \sin(1000t + 18.44^\circ)$$

下面這種寫法是不對的...

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z_T} = \frac{120 \angle 10^\circ}{7.849\text{k}\Omega \angle -8.44^\circ} = 15.29\text{mA} \angle 18.44^\circ = 21.623\text{mA} \sin(1000t + 18.44^\circ)$$

利用 current divider rule 求 I_L

$$I_L(j\omega) = \frac{Z_C}{Z_C + Z'} \cdot I(j\omega) = \frac{5\text{k}\Omega \angle -90^\circ}{-j5\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega + j3\text{k}\Omega} \cdot 15.29\text{mA} \angle 18.44^\circ = 21.18\text{mA} \angle -37.87^\circ$$

$$V_L(j\omega) = I_L(j\omega) \cdot Z_L = 21.18\text{mA} \angle -37.87^\circ \cdot 3\text{k}\Omega \angle 90^\circ = 63.54\text{V} \angle 52.13^\circ \quad (\text{Phasor 型式})$$

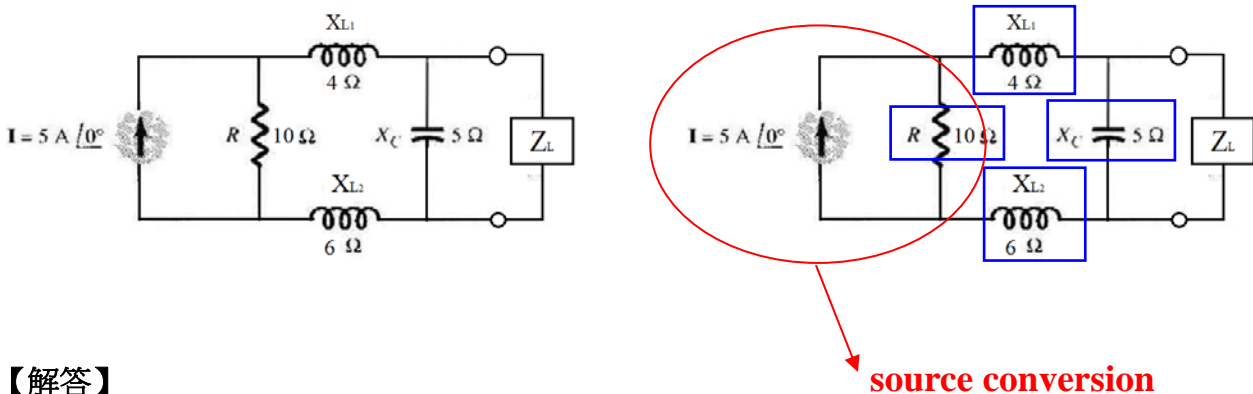
轉成 time domain

$$v_L(t) = 89.859\text{V} \sin(1000t + 52.13^\circ)$$

下面這種寫法是不對的...

$$V_L(j\omega) = I_L(j\omega) \cdot Z_L = 21.18\text{mA} \angle -37.87^\circ \cdot 3\text{k}\Omega \angle 90^\circ = 63.54\text{V} \angle 52.13^\circ = 89.859\text{V} \sin(1000t + 52.13^\circ)$$

- 5.
- 找出負載 (Load) Z_L 左側電路的 Thévenin equivalence.
 - 要讓負載 (Load) Z_L 得到最大功率 (Maximum power)，負載 Z_L 是由哪些元件組合而成？元件的電阻值 (Resistance) 或電感值 (Inductance) 或電容值 (Capacitance) $\omega = 1,000 \text{ rad/s}$,
 - 最大功率？



【解答】

把元件的電阻與電抗以 impedance 表現

$$Z_1 = 10\Omega \angle 0^\circ \quad Z_2 = 4\Omega \angle 90^\circ \quad Z_3 = 6\Omega \angle 90^\circ \quad Z_4 = 5\Omega \angle -90^\circ$$

由於要讓負載 Z_L 得到最大功率，其組合究竟為何？得先把負載左側的電路，以 Thévenin equivalence 表現出來。在求 Thévenin equivalence 時，我們可以將其中的 I 與 Z_1 的並聯，透過 source conversion 轉換成 V 與 Z_1 的串聯。

$$Z_1 = 10\Omega \quad V = 50\text{V} \angle 0^\circ$$

然後，進一步求 Z_{TH} 與 E_{TH}

$$Z_{TH} = (Z_1 + Z_2 + Z_3) // Z_4 = 6.325\Omega \angle -71.565^\circ = 2\Omega - j6\Omega$$

$$E_{TH} = V \cdot \frac{Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} = 50 \angle 0^\circ \cdot \frac{5\Omega \angle -90^\circ}{10\Omega + j5\Omega} = 22.361\text{V} \angle -116.565^\circ$$

其中， $R_{TH} = 2\Omega$

要讓負載 Z_L 得到最大功率，負載 Z_L

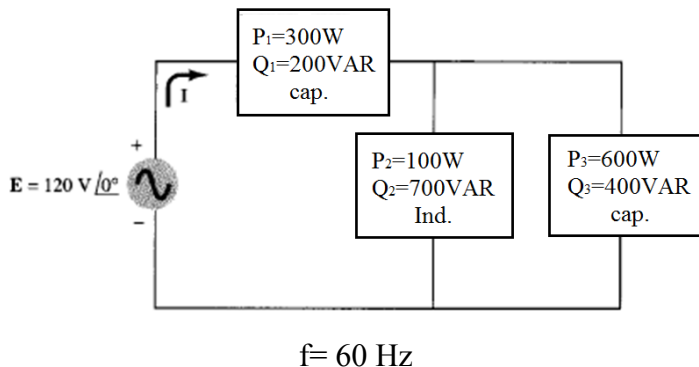
$Z_L = 2\Omega + j6\Omega$ 電阻與電感（電抗值為 6Ω ）串聯。

$$X_L = \omega L = 6\Omega \quad L = 6 \text{ mH}$$

其中，電阻的電阻值 2Ω 、電感的電感值 6 mH 。

$$P_{\text{mzx}} = \frac{E_{\text{TH}}^2}{4R_{\text{TH}}} = \frac{22.361^2}{8} = 62.502 \text{ W}$$

6.



a. Total real power = _____

b. Net reactive power = _____

c. Apparent power = _____

d. The current $i(t)$ = _____

e. The power factor = _____

lagging leading

【解答】

a. Total real power $P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 1,000 \text{ W}$

b. 電容的 reactive power 為負，電感的 reactive power 為正。

$$\text{Net reactive power } Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -200 \text{ VAR (電容)} + 700 \text{ VAR (電感)} - 400 \text{ VAR (電容)} \\ = +100 \text{ VAR (電感性較強)}$$

c. Apparent power $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 1,004.988 \text{ VA}$

d. Current from source $I = \frac{S_T}{E} = \frac{1004.988 \text{ VA}}{120 \text{ V}} = 8.375 \text{ A}$ (effective value)

The power factor $F_p = \frac{P_T}{S_T} = 0.995$ lagging (電感性較強)

$$\theta = \cos^{-1} 0.995 = 5.732^\circ$$

The current $i(t) = 11.844 \sin(377t - 5.7328^\circ)$ (time domain)

7. 電路系統中，負載端包括「兩具功率為 5-hp、efficiency η 為 75% 的機具，其 power factor 為 0.8 (leading)」及「12 kW 的加熱器，其 power factor 為 1」。前兩者呈現並聯關係。若電源的電壓 $E = 220 \text{ V}$ 、頻率為 60 Hz。(1) 由電壓源供應的電流？(2) 若要让電路系統的 power factor 調升為 1 (即進行 power factor correction)，必須加上那一種元件？(3) 若加入的元件要與機具並聯，則加入元件的 inductance？或 capacitance？

【解答】

機具的輸出功率 $P_o = 2 \times 5 \text{ hp} \times 746 \text{ W/hp} = 7,460 \text{ W}$

機具的輸入功率 $P_i = P_o / \eta = 7,460 \text{ W} / 0.75 = 9,946.67 \text{ W}$

※ η 為 75%，表示 100 W 的輸入僅有 75W 真正用於作功，其餘 25 W 因為機器摩擦等因素給消耗掉了。

因 power factor 為 0.8，leading，故 $\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.86^\circ$ 且電容性強過電感性。

Reactive power $Q_M = -P_i \tan \theta = -9946.67\text{W} \times \tan 36.87^\circ = -7460.03\text{VAR}$ (C, 負值)

因此，負載的

Total real power $P_T = 12,00\text{W} + 9,946.67\text{W} = 21,946.67\text{W}$ 【訂正】

Reactive power $Q_T = -7,460.03\text{VAR}$ (C, 負值)

電壓源提供的：Apparent power $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 23,179.913\text{VA}$ 【訂正】

Current from source $I = \frac{S_T}{E} = \frac{23,179.913\text{VA}}{220\text{V}} = 105.363\text{A}$ 【訂正】

由於負載的 total reactive power 為 $-7,460.03\text{VAR}$ (C, 負值)。

為了達成 power factor correction 的目的，

所加入的元件應為電感 (inductor)，且電感的 reactive power Q_L 為 $+7,460.03\text{VAR}$ 。

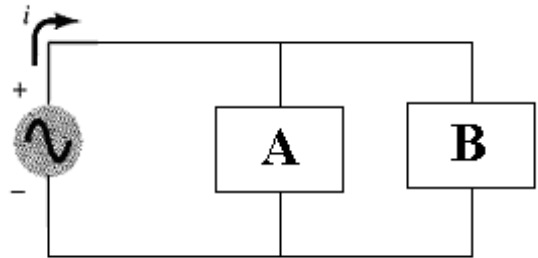
加入的電感與機具並聯，因此跨越電感的電壓為 220V ，與 reactive power 的關係為

$$Q_L = \frac{E^2}{X_L} = 7,460.03\text{VAR} \text{ , 可導出 } X_L = \frac{E^2}{Q_L} = 6.488\Omega$$

其電感值 (inductance) $L = \frac{X_L}{2\pi f} = 16.575\text{mH}$

【延伸命題】 調整後 (after power factor correction) 由 Apparent power ? 電壓源供應的電流 ?

8. 有兩組電路 A 與 B 並聯接到電壓源，已知電路 A 的功率消耗 (Real power dissipated) $P_A=20\text{KW}$ ，Power factor $F_{PA}=0.85$ (Leading)，電路 B 的功率消耗 (Real power dissipated) $P_B=12\text{KW}$ ，Power factor $F_{PB}=0.8$ (lagging)。若電源的電壓 $E_{\text{eff}}=220\text{V}$ 、頻率為 60Hz 。要讓電路系統的 power factor 調升為 1 (即進行 power factor correction)，必須加上那一種元件？若加入的元件要與電路 B 並聯，則加入元件的 inductance ? 或 capacitance ?



【解答】

電路 A

Real power $P_A=20\text{KW}$ Power factor $F_{PA}=0.85$ (Leading)， $\theta = \cos^{-1} 0.85 = 31.788^\circ$

Reactive power $Q_A = -P_A \tan \theta = -12.395\text{KVAR}$ (電容性強，故 Q_A 為負值)

電路 B

Real power $P_B=12\text{KW}$ Power factor $F_{PB}=0.8$ (lagging)， $\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.86^\circ$

Reactive power $Q_B = +P_B \tan \theta = +9\text{KVAR}$ (電感性強，故 Q_B 為正值)

Total real power $P_T = \underline{32,000\text{W}}$

Total reactive power $Q_T = \underline{-3,395\text{VAR}}$ (負值)

Apparent power $S_T = \underline{32,179.590\text{VA}}$ 【訂正】

電壓源流出的電流 $I_{\text{eff}} = \frac{S_T}{E} = 146.271\text{A}$

為了達成 power factor correction 的目的，所加入的元件為電感。

該電感的 reactive power 為 $3,395\text{VAR}$ 。

電抗？電感值？調整後，電路的 apparent power ？